Cálculo Diferencial e Integral 2: Funções Vetoriais

Jorge M. V. Capela

Instituto de Química - UNESP
Araraquara, SP

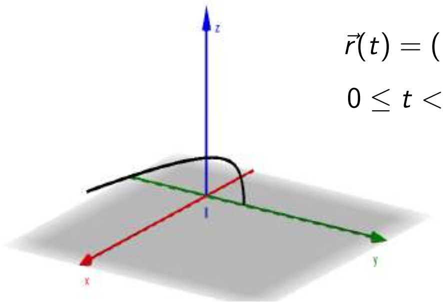
capela@iq.unesp.br

Araraquara, SP - 2017

Definição de uma função vetorial

É uma função cujo domínio é o conjunto dos números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores:

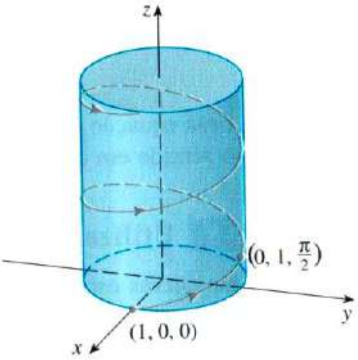
$$\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t)) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$$



$$\vec{r}(t) = (t^3, \ln(3-t), \sqrt{t})$$

$$0 \leq t < 3$$

Exemplo 1: $\vec{r}(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t,\ t)$



Derivadas e integrais de funções vetoriais

Se $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, então

$$\vec{r}\,'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t))$$

e

$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = \left(\int_a^b f(t)dt\right) + \left(\int_a^b g(t)dt\right) + \left(\int_a^b h(t)dt\right)$$

Propriedades

Sejam $\vec{u}(t)$ e $\vec{v}(t)$, funções vetoriais diferenciáveis e $f(t)$ uma função escalar. Então:

$$\frac{d}{dt}\left[f(t)\vec{u}(t)\right] = f'(t)\vec{u}(t) + f(t)\vec{u}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)\right] = \vec{u}'(t)\cdot\vec{v}(t) + \vec{u}(t)\cdot\vec{v}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)\right] = \vec{u}'(t)\times\vec{v}(t) + \vec{u}(t)\times\vec{v}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{u}(f(t))\right] = \vec{u}'(f(t))f'(t)$$

Exemplo 2

Mostre que $|\vec{r}(t)| = c$ (uma constante), então $\vec{r}\,'(t)$ é ortogonal a $\vec{r}(t)$ para todo t.

De fato:

$$\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = |\vec{r}(t)|^2 = c^2$$

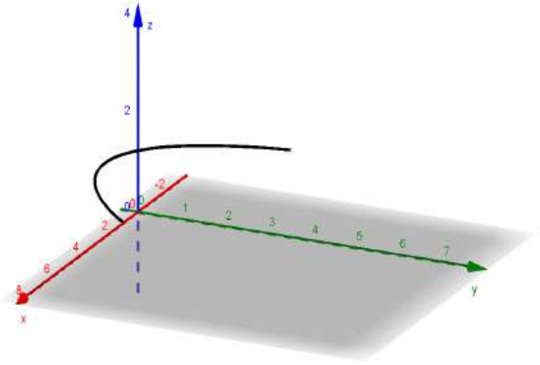
$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)\right] = \vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}(t) + \vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = 2\vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}(t) = 0$$

Portanto

$$\vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}(t) = 0$$

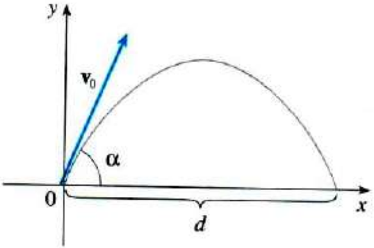
Exemplo 3

Uma partícula se move de uma posição inicial $\vec{r}(0) = (1, 0, 0)$ com velocidade inicial $\vec{v}(0) = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Sua aceleração é dada por $\vec{a}(t) = 4t\vec{i} + 6t\vec{j} + \vec{k}$. Determine sua velocidade e posição no instante t.



Exemplo 4

Um projetil é disparado com ângulo α de elevação e velocidade inicial v_0. Assumindo que a resistência do ar seja desprezível e que a única força externa seja a da gravidade determine a função posição $\vec{r}(t)$ do projetil. Para qual valor de α obtemos o maior alcance (distancia horizontal percorrida)?



Exemplo 4

A força da gravidade age verticalmente, então

$$\vec{F} = m\vec{a} = -mg\vec{j}, \quad g = |\vec{a}| \approx 9.8\ \mathrm{m/s}^2 \Rightarrow \vec{a} = -g\vec{j}$$

$$\vec{v}\,'(t) = \vec{a}(t) \Rightarrow \vec{v}(t) = -gt\vec{j} + \vec{C} \Rightarrow \vec{C} = \vec{v}_0$$

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{v}(t) = -gt\vec{j} + \vec{v}_0$$

$$\vec{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\vec{j} + t\vec{v}_0 + \vec{D}$$

$$\vec{r}(0) = \vec{0} \Rightarrow \vec{D} = \vec{0}$$

Portanto,

$$\vec{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\vec{j} + t\vec{v}_0$$

Exemplo 4

Seja $|\vec{v}_0| = v_0$, então da figura podemos escrever

$$\vec{v}_0(t) = v_0 \cos\alpha \vec{i} + v_0 \operatorname{sen}\alpha \vec{j}$$

$$\vec{r}(t) = (v_0 \cos\alpha) t \vec{i} + \left[(v_0 \operatorname{sen}\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \right] \vec{j}$$

As equações paramétricas são:

$$x = (v_0 \cos\alpha) t \quad \text{e} \quad y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = 0 \Rightarrow t = 0 \quad \text{ou} \quad t = \frac{2 v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}$$

$$d = x = (v_0 \cos\alpha) \frac{2 v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} = \frac{v_0^2 (2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha)}{g}$$

Exemplo 4

$$d = \frac{v_0^2(2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha)}{g} = \frac{v_0^2(\,\text{sen}\,2\alpha)}{g}$$

Portanto d tem valor máximo quando $\text{sen}\,2\alpha = 1$, isto é

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Exercícios

1) Determine a derivada da função vetorial $\vec{r}(t) = (t^2, 1 - t, \sqrt{t})$
2) Determine a derivada da função vetorial $\vec{r}(t) = \vec{i} - \vec{j} + e^{4t}\vec{k}$
3) Calcule a integral

$$\int_0^1 \left(t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k} \right) dt$$

4) Determine $\vec{r}(t)$ se $\vec{r}\,'(t) = t^2\vec{i} + 4t^3\vec{j} - t^2\vec{k}$ e $\vec{r}(0) = \vec{j}$
5) Mostre que as curvas $r_1(t) = (t, t^2, t^3)$ e $r_2(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t, t)$ se encontram na origem e que o angulo de interseção é arccos $\left(\sqrt{6}/6\right) \approx 66^{o}$